Origen de la definición de los Fasores empleados en el análisis de Sistemas de parámetros concentrados

Lamberto Maza Casas

11 de abril de 2008

1. Introducción

En esta nota se presentan algunas ecuaciones de las cuales pudo haberse originado la definición de los fasores empleados desde hace mucho tiempo en el análisis de estado estable sinusoidal en la teoría de circuitos de parámetros concentrados. Es bien sabido que para sistemas lineales, invariantes en el tiempo, no anticipativos (causales), Hurwitz estables; la respuesta a una entrada (sinusoidal) de la forma

$$u(t) = V_0 \cos(kt + \phi),\ t \geq 0, \quad V_0,\ k, \phi \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

está dada por

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t), \quad t > 0,$$

donde

$$y_t(t) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty,$$
$$y_{ss}(t) = A + R\cos(kt + \varphi), \quad t > 0, \tag{2}$$

y las cantidades R y φ dependen de la frecuencia real k.

1.1. Espacios L_q

Las definiciones presentadas en esta sección fueron tomadas del capítulo 1 del libro [2]. Los espacios de señales bajo consideración son L_q, $q = 1, 2, \ldots, \infty$.

Definición 1 *Para cada $q \in \{1, 3, \ldots\}$, el conjunto $L_q[0, \infty) = L_q$ consiste de todas las funciones*[1] *$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), las cuales son medibles*[2] *y*

[1] En general, siempre se identifican funciones las cuales son iguales excepto para un conjunto de medida de Lebesgue cero. Entonces las condiciones impuestas sobre las funciones deben ser interpretadas en el sentido de que son válidas para todo $t \in \mathbb{R}_+$, excepto para un conjunto de medida cero.

[2] Una función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es medible si es puntualmente el límite (excepto para un conjunto de medida cero) de una secuencia de funciones escalonadas sobre $\mathbb{R}_+$.

satisfacen

$$\int_0^\infty |f(t)|^q \, dt < \infty. \tag{3}$$

El conjunto $L_\infty[0,\infty) = L_\infty$ *consiste de todas las funciones medibles* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *que son acotadas; esto es,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| < \infty. \tag{4}$$

2. Relación entrada-salida para la clase de sistemas considerada

Para un sistema de la clase mencionada en la sección 1, la salida y, la respuesta a entrada cero z, y la entrada u, están relacionadas como sigue (véase [1])

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) + \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= z(t) + \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \text{ para todo } t \geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Para todos los estados iniciales, la respuesta a entrada cero es acotada sobre $\mathbb{R}_+$ y $z(t) \to z_\infty$ cuando $t \to \infty$, donde z_∞ es un número finito que depende del estado inicial. La respuesta al impulso unitario g está dada por

$$g(t) = u_0(t)\,[r + g_1(t)]$$

donde la constante r es no negativa, $u_0(t)$ es la función escalón unitario, g_1 es acotada sobre $\mathbb{R}_+$, es un elemento de $L_1(0,\infty)$, y $g_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$. Cuando $r = 0$, para todos los estados iniciales, $z_\infty = 0$.

3. Lemas técnicos previos

Lema 1 *Para cualquier función real valuada de variable real,* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, *se cumple que si* $t \in \mathbb{R}_+ \triangleq [0,\infty)$, $\theta \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\int_0^t g(\tau)e^{j\theta}d\tau + \int_0^t g(\tau)e^{-j\theta}d\tau\right] &= Re\left\{\int_0^t g(\tau)e^{j\theta}d\tau\right\} \\ &= Re\left\{\int_0^t g(\tau)e^{-j\theta}d\tau\right\} \end{aligned}$$

donde j *es la unidad imaginaria (*$j=\sqrt[2]{-1}$*) y* $Re\{z\}$ *sinifica la parte real de* z. $\square$

Dado que $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$, notemos primero que

$$\int_0^t g(\tau)e^{\pm j\theta}d\tau = \int_0^t g(\tau)\cos\theta d\tau \pm j\int_0^t g(\tau)\sin\theta d\tau.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\int_0^t g(\tau)e^{j\theta}d\tau + \int_0^t g(\tau)e^{-j\theta}d\tau\right] &= \frac{1}{2}\left[\int_0^t g(\tau)\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right)d\tau\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^t g(\tau)\left(2\cos\theta\right)d\tau\right] \\
&= \int_0^t g(\tau)\cos\theta d\tau \\
&= \mathrm{Re}\left\{\int_0^t g(\tau)e^{j\theta}d\tau\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\int_0^t g(\tau)e^{-j\theta}d\tau\right\}
\end{aligned}$$

con lo cual se concluye la demostración.

Lema 2 *Para cualquier función complejo valuada de variable real, $\chi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, se cumple que si la integral*

$$\int_0^\infty \chi(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \chi(t)dt \tag{6}$$

converge, entonces

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty \chi(\sigma)d\sigma = 0. \ \square$$

Si se cumple (6), entonces por definición $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \Gamma(\epsilon) > 0$, tal que si $T > \Gamma(\epsilon)$, entonces

$$\left|\int_0^\infty \chi(t)dt - \int_0^T \chi(t)dt\right| = \left|\int_T^\infty \chi(t)dt\right| < \epsilon.$$

Pero esto significa que $\forall\ \epsilon > 0$, si $t > \Gamma(\epsilon)$, entonces

$$\left|\int_t^\infty \chi(\sigma)d\sigma\right| < \epsilon,$$

lo cual implica que

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty \chi(\sigma)d\sigma = 0,$$

que es lo que se quería demostrar.

4. Respuesta en estado estacionario sinusoidal

Utilizando la ecuación (5) obtendremos una fórmula en la cual aparecen las cantidades conocidas como *fasores*. Iniciamos reescribiendo (1) como sigue

$$u(t) = V_0 \cos(kt+\phi) = \frac{V_0}{2}\left[e^{j(kt+\phi)} + e^{-j(kt+\phi)}\right] \tag{7}$$

Substituyendo (7) en (5) obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) + \int_0^t g(\tau)\frac{V_0}{2}\left[e^{j(k(t-\tau)+\phi)} + e^{-j(k(t-\tau)+\phi)}\right] d\tau \\ &= z(t) + \frac{1}{2}\left[\int_0^t g(\tau)e^{j(k(t-\tau)+\phi)} d\tau V_0 + \int_0^t g(\tau)e^{-j(k(t-\tau)+\phi)} d\tau V_0\right] \end{aligned} \tag{8}$$

De acuerdo con el lema 1, podemos reescribir (8) como

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) + \mathrm{Re}\left\{\int_0^t g(\tau)e^{j(k(t-\tau)+\phi)} d\tau V_0\right\} \\ &= z(t) + \mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty g(\tau)e^{j(k(t-\tau)+\phi)} d\tau V_0 - \int_t^\infty g(\tau)e^{j(k(t-\tau)+\phi)} d\tau V_0\right\} \\ &= z(t) + \mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty g(\tau)e^{-jk\tau} d\tau V_0 e^{j(kt+\phi)} - \int_t^\infty g(\tau)e^{-jk\tau} d\tau V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

Dado que

$$G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st} dt \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_0^T g(t)e^{-st} dt$$

tenemos

$$\int_0^\infty g(\tau)e^{-jk\tau} d\tau = G(jk) \tag{10}$$

Substituyendo (10) en (9) se obtiene

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) + \mathrm{Re}\left\{G(jk)V_0 e^{j(kt+\phi)} - \int_t^\infty g(\tau)e^{-jk\tau} d\tau V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} \\ &= z(t) + \mathrm{Re}\left\{G(jk)V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} - \mathrm{Re}\left\{\int_t^\infty g(\tau)e^{-jk\tau} d\tau V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora dado que

$$\int_0^\infty g(\tau)e^{-jk\tau} d\tau = \lim_{T\to\infty} \int_0^T g(\tau)e^{-jk\tau} d\tau = G(jk) \in \mathbb{C},$$

por el lema 2 sabemos que

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty g(\tau)e^{-jk\tau}d\tau = 0,$$

de lo cual se sigue que

$$z(t) - \mathrm{Re}\left\{\int_t^\infty g(\tau)e^{-jk\tau}d\tau V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} \to z_\infty, \text{ cuando } t\to\infty.$$

equivalentemente, $\forall\epsilon > 0$, $\exists\ T(\epsilon) > 0$, tal que si $t > T(\epsilon)$, entonces

$$\left| z(t) - \mathrm{Re}\left\{\int_t^\infty g(\tau)e^{-jk\tau}d\tau V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} - z_\infty \right| < \epsilon \tag{12}$$

Por lo tanto

$$z_\infty - \epsilon < z(t) - \mathrm{Re}\left\{\int_t^\infty g(\tau)e^{-jk\tau}d\tau V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} < z_\infty + \epsilon,$$

sumando $\mathrm{Re}\left\{G(jk)V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\}$ a cada lado de ambas desigualdades

$$z_\infty + \mathrm{Re}\left\{G(jk)V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} - \epsilon < y(t) < z_\infty + \mathrm{Re}\left\{G(jk)V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} + \epsilon$$

entonces

$$-\epsilon < y(t) - \left[z_\infty + \mathrm{Re}\left\{G(jk)V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\}\right] < \epsilon, \quad \forall\, t > T(\epsilon)\ ,$$

o bien

$$\left| y(t) - \left[z_\infty + \mathrm{Re}\left\{G(jk)V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\}\right] \right| < \epsilon, \quad \forall\, t > T(\epsilon)\ .$$

Como consecuencia de todo lo anterior podemos identificar en (11)

$$\begin{aligned} y_t(t) &= -\mathrm{Re}\left\{\int_t^\infty g(\tau)e^{-jk\tau}d\tau V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} \\ &= -\mathrm{Re}\left\{\left(\int_t^\infty g(\tau)e^{-jk\tau}d\tau V_0 e^{j\phi}\right)e^{jkt}\right\} \to 0, \text{ cuando } t\to\infty, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= z_\infty + \mathrm{Re}\left\{G(jk)V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} && (13) \\ &= z_\infty + \mathrm{Re}\left\{V_0\left|G(jk)\right| e^{j(kt+\phi+\arg G(jk))}\right\} \\ &= z_\infty + V_0\left|G(jk)\right|\cos(kt+\phi+\arg G(jk)) && (14) \end{aligned}$$

Esto es, las cantidades A, R, y φ en (2) están dadas por $A = z_\infty$, $R = V_0\left|G(jk)\right|$, y $\varphi = \phi + \arg G(jk)$. Por otra parte, retomando la ecuación (13)

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= z_\infty + \mathrm{Re}\left\{G(jk)V_0 e^{j(kt+\phi)}\right\} \\ &= z_\infty + \mathrm{Re}\left\{\left(G(jk)V_0 e^{j\phi}\right)e^{jkt}\right\}. && (15) \end{aligned}$$

Notando que $V_0 \cos(kt+\phi)$ y $V_0 \left|G(jk)\right| \cos(kt+\phi+\arg G(jk))$ en (1) y (15) respectivamente pueden obtenerse de $V_0 e^{j\phi}$ y $G(jk)V_0 e^{j\phi} = V_0 \left|G(jk)\right| e^{j(\phi+\arg G(jk))}$, también respectivamente con las fórmulas

$$V_0 \cos(kt+\phi) = \mathrm{Re}\left\{\left(V_0 e^{j\phi}\right) e^{jkt}\right\}$$

y

$$V_0 \left|G(jk)\right| \cos(kt+\phi+\arg G(jk)) = \mathrm{Re}\left\{\left(V_0 \left|G(jk)\right| e^{j(\phi+\arg G(jk))}\right) e^{jkt}\right\}$$

se definen los *fasores* de $V_0 \cos(kt+\phi)$ y $V_0 \left|G(jk)\right| \cos(kt+\phi+\arg G(jk))$ como

- Fasor de$\{V_0 \cos(kt+\phi)\} \triangleq V_0 e^{j\phi}$
- Fasor de$\{V_0 \left|G(jk)\right| \cos(kt+\phi+\arg G(jk))\} \triangleq V_0 \left|G(jk)\right| e^{j(\phi+\arg G(jk))}$

Nótese que con esta definición

$$\begin{aligned}
\text{Fasor de}\left\{V_0 \left|G(jk)\right| \cos(kt+\phi+\arg G(jk))\right\} &= V_0 \left|G(jk)\right| e^{j(\phi+\arg G(jk))} \\
&= \left[\left|G(jk)\right| e^{j\arg G(jk)}\right] V_0 e^{j\phi} \\
&= G(jk) V_0 e^{j\phi} \\
&= G(jk)\text{Fasor de}\left\{V_0 \cos(kt+\phi)\right\}
\end{aligned}$$

Referencias

[1] A General Formulation of the Nyquist Criterion, C. A. Desoer (IEEE Transactions on Circuit Theory, June 1965).

[2] van der Schaft, Arjan. L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control. Springer-Verlag, London Limited, 1996.